

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/125/199-205>

Nəzrin İmamverdiyeva

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0001-9854-5409>

inezrin2003@gmail.com

Bir sərhəd məsələsinin şəbəkə üsulu ilə həlli

Xülasə

Diferensial tənliklərin həlli üçün ən geniş yayılmış və universal ədədi üsul sonlu fərqlər üsuludur. Üsulun əsas məzmunu aşağıdakılardan ibarətdir. Arqumentin kəsilməz dəyişmə oblastı (məsələn, bir kəsik) düyünlər adlanan diskret nöqtələr çoxluğu ilə əvəz edilir. Bu düyünlər fərqlər şəbəkəsini yaradır. Kəsilməz arqumentin axtarılan funksiyası verilmiş şəbəkə üzərində diskret arqument funksiyası ilə yaxınlaşdırılır. Bu funksiya şəbəkə funksiyası adlanır. İlk diferensial tənlik şəbəkə funksiyasına görə fərq tənliyi ilə əvəz edilir. Bu zaman tənlikdəki daxil olan törəmələr müvafiq sonlu fərqlər sxemi vasitəsilə ədədi olaraq aproksimasiya olunur. Diferensial tənliyin fərq tənliyi ilə əvəz olunmasına onun şəbəkə üzərində aproksimasiyası (və ya fərqlər aproksimasiyası) deyilir. Diferensial tənliyin həlli şəbəkənin düyünlərində şəbəkə funksiyasının qiymətlərinin tapılmasına gətirilir. Diferensial tənliyin fərq tənliyi ilə əvəz edilməsinin əsaslandırılması, alınan həllərin dəqiqliyi, metodun dayanıqlılığı — diqqətlə öyrənilməsinə tələb edən ən mühüm məsələlərdir. Sonlu fərqlər üsulu xüsusilə sərhəd və başlanğıc məsələlərinin ədədi həllində geniş tətbiq olunur. Bu metodun köməyi ilə mürəkkəb analitik həlli olmayan diferensial tənliklər praktik şəkildə hesablanı bilər. Şəbəkənin addımının seçilməsi hesablamaların dəqiqliyinə və hesablamaya birbaşa təsir göstərir. Buna görə də optimal addımın müəyyən edilməsi mühüm praktiki məsələ hesab olunur.

***Açar sözlər:** sonlu fərqlər metodu, diferensial tənliklər, fərq tənliyi, aproksimasiya, dayanıqlıq və dəqiqlik, kəsilməzlik, düyün nöqtəsi*

Nazrin Imamverdiyeva

Azerbaijan State Oil and Industry University
Master's student

<https://orcid.org/0009-0001-9854-5409>

inezrin2003@gmail.com

Solution of a Boundary Value Problem by the Grid Method

Abstract

The most widespread and universal numerical method for solving differential equations is the finite difference method. The main idea of the method is as follows. The continuous domain of variation of the argument (for example, an interval) is replaced by a set of discrete points called nodes. These nodes form a difference grid. The sought function of a continuous argument is approximated by a discrete-argument function defined on the given grid. This function is called a grid function. The original differential equation is replaced by a difference equation with respect to the grid function. In this process, appropriate finite difference relations are used to approximate the derivatives appearing in the equation. The replacement of a differential equation by a difference equation is called its approximation on the grid (or finite difference approximation). Solving the differential equation is thus reduced to finding the values of the grid function at the grid nodes.

The justification of replacing the differential equation with a difference equation, the accuracy of the obtained solutions, and the stability of the method are among the most important issues that require careful study. The finite difference method is widely used, especially in the numerical solution of boundary and initial value problems. With the help of this method, differential equations that do not have a complex analytical solution can be solved in a practical manner. The choice of the grid step directly affects the accuracy of the calculations and the computational process. Therefore, determining the optimal step size is considered an important practical issue.

Keywords: *finite difference method, differential equations, difference equation, approximation, stability and accuracy, continuity, grid point*

Giriş

Təcrübədə tez-tez elə məsələləri həll etmək lazım gəlir ki, burada şərtlər müstəqil dəyişənin iki qiymətində (baxılan parçanın uclarında) verilir. Belə məsələlər sərhəd məsələləri adlanır və yüksək tərtibli tənliklərin və ya tənliklər sisteminin həlli zamanı yaranır. Sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsulları iki qrupa bölünür (Atkinson, 1989, s. 120–210):

Birinci qrupa şərti olaraq elə üsulları aid edirik ki, burada sərhəd məsələsinin həlli bir neçə (iki) Koşi məsələsinin həllinə gətirilir. Məlumdur ki, həmin məsələlərin həllini müxtəlif üsullarla istənilən dəqiqliklə reallaşdırmaq mümkündür.

İkinci qrupa isə sonlu fərqlər üsulu aid edilir. Bu diferensial operatorlar fərq sxemləri ilə (çox vaxt bərabəraddımlı şəbəkədə) əvəz olunur və məsələ xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə gətirilir.

Nəticələrin dəqiqliyi şəbəkənin müxtəlif addımlarında (çox vaxt h və $h/2$ olduqda) ikiqat hesablama aparmaq yolu ilə qiymətləndirilir (Ascher və b., 1995).

Məsələnin qoyuluşu

Əsas (baza) kimi dəyişən əmsallı ikinci tərtibli adi diferensial tənliyi nəzərdən keçirək.

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

burada əmsallar dəyişəndir

$$k(x) \geq k > 0, \quad q(x) \geq 0.$$

Naməlum $u(x)$ funksiyasının birmənalı təyin edilməsi üçün (1) tənliyi $[0, l]$ parçasının uclarında verilən iki sərhəd şərti ilə tamamlanır (Chapra və Canale, 2015).

Funksiya $u(x)$ (birinci növ sərhəd şərti),

$$\omega(x) = k(x)\frac{du}{dx}(x)$$

(ikinci növ sərhəd şərti) və ya onların xətti kombinasiyası (üçüncü növ sərhəd şərti) verilə bilər:

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \quad (2)$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) = \mu_2, \quad (3)$$

$$k(0)\frac{du}{dx}(0) + \sigma_1 u(0) = \mu_1, \quad k(l)\frac{du}{dx}(l) + \sigma_2 u(l) = \mu_2. \quad (4)$$

İkinci tərtibli elliptik tənliklər, ümumi forması (1) tənliyi olan, bir çox fiziki-mexaniki proseslərin modelləşdirilməsində istifadə olunur (Bakhvalov, 1977).

Bundan əlavə, özünəqoşma xassəsinə malik olmayan operatorlu məsələlər də nəzərdən keçirilə bilər, məsələn,

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + v(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l. \quad (5)$$

Konveksiya-diffuziya tənliyi (5) fasiləsiz mühit mexanikasında proseslərin tədqiqində model tənlik kimi istifadə olunur (Kreyszig, 2011).

Sərhəd məsələsinin ədədi həlli

Adi diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin təxmini həllinə aid hesablama alqoritmlərinin qurulması zamanı əsas diqqət tənliklərin, sərhəd şərtlərinin və kəsilməz olmayan olan məsələlərdə qoşulma şərtlərinin aproksimasiyası məsələlərinə yönəldilir (Thomas, 1995).

Müxtəlif normalarda təxmini həllin dəqiqliyinin yoxlanılması aparılır, həmçinin baxılan məsələlər sinfi üçün şəbəkə tənliklərinin həllində birbaşa metodların xüsusiyyətləri müzakirə olunur (Samarskii və b, 2001, s. 210–280).

Sərhəd məsələsinin aproksimasiyası $[0, l]$ parçasında addımı h olan bərabər şəbəkəni $\bar{\omega}_h$ ilə işarə edək:

$$\bar{\omega}_h = \{x: x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

burada ω_h — daxili düyünlər çoxluğu, $\partial\omega_h$ isə sərhəd düyün nöqtələri çoxluğudur. Bundan sonra, xüsusi olaraq qeyd edilmədikdə, $u = u_i = u(x_i)$ olduğunu qəbul edəcəyik. Sol fərq törəməsi üçün aşağıdakı ifadəni alırıq (Isaacson və Keller, 1994):

$$u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{h}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + O(h^2),$$

yəni sol fərq törəməsi daxili düyün nöqtələri çoxluğunda, $u(x) \in C^2(0, l)$ olduqda, törəməni $\frac{du}{dx}$ birinci aproksimasiya dəqiqliyi ilə $O(h)$ yaxınlaşdırır (Gautschi və Birkhäuser, 1997, s. 305–360).

Oxşar şəkildə sağ fərq törəməsi üçün alırıq:

$$u_x = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + O(h^2),$$

Üçnöqtəli sxem (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) üçün mərkəzi fərq törəməsindən istifadə etmək olar:

$$u_{x^0} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{3} \frac{d^3u}{dx^3} + O(h^3),$$

bu isə $u(x) \in C^3(0, l)$ olduqda törəməni $\frac{du}{dx}$ ikinci tərtib dəqiqliyi ilə aproksimasiya edir.

İkinci törəmə $\frac{d^2u}{dx^2}$ üçün alırıq:

$$u_{x\bar{x}} = \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Bu fərq operatoru $x = x_i$ qovşağında, $u(x) \in C^4(0, l)$ olduqda, ikinci törəməni ikinci tərtib dəqiqliyi ilə aproksimasiya edir.

Şəbəkənin daxili düyün nöqtələri çoxluğunda diferensial riyazi operatoru aproksimasiya edirik:

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u, \quad x \in (0, l), \quad (6)$$

Kifayət qədər hamar əmsallar və həll üçün aşağıdakı fərq operatoru ilə:

$$Ly = -(ay_{\bar{x}})_x + cy, \quad x \in \omega_h. \quad (7)$$

İkinci tərtib dəqiqliklə aproksimasiya üçün fərq operatorunun əmsalları elə seçilməlidir ki,

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{dk}{dx}(x_i) + O(h^2), \quad (8)$$

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2), \quad (9)$$

$$c_i = q(x_i) + O(h^2). \quad (10)$$

(10)-a uyğun olaraq, məsələn, $c_i = q(x_i)$ qəbul edək. (8) və (9) şərtləri, xüsusilə, a_i -nin təyin edilməsi üçün aşağıdakı düsturları ödəyir:

$$a_i = k_{i-\frac{1}{2}} = k(x_i - 0.5h),$$

$$a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2},$$

$$a_i = 2 \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right)^{-1}.$$

Diferensial operatorların sonlu fərqlərlə formal əvəzlənməsi metodu sərhəd şərtlərinin aproksimasiyasında da istifadə oluna bilər. Ən sadə şəkildə sərhəd şərtləri (2) aşağıdakı kimi aproksimasiya olunur (Moin, 2010):

$$y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2. \quad (11)$$

İkinci və üçüncü növ sərhəd şərtlərinin ikinci tərtibli sərhəd düyünlərində $x = x_0 = 0$ və $x = x_N = l$ aproksimasiyası üçün (1) tənliyindən istifadə edilir — aproksimasiya olunan tənliklər kimi. Bu halda (1) tənliyindəki kənar şərtlər (4) aşağıdakı fərq münasibətləri ilə aproksimasiya olunur:

$$-a_1 y_{\bar{x},1} + \left(\sigma_1 + \frac{h}{2} q_0 \right) u_0 = \mu_1 + \frac{h}{2} f_0,$$

$$a_N y_{\bar{x},N} + \left(\sigma_2 + \frac{h}{2} q_N \right) u_N = \mu_2 + \frac{h}{2} f_N.$$

Beləliklə, biz aşağıdakı fərq sxeminə malik oluruq — fərq tənliyindən ibarət olan

$$-(ay_{\bar{x}})_x + cy = \varphi, x \in \omega_h, \quad (12)$$

və müvafiq sərhəd şərtlərinin aproksimasiyası ilə tamamlanan.

Sərhəd məsələsinin həlli üçün Qovma üsulunun tətbiqi (Collatz, 1966).

Adi diferensial tənlik üçün qoyulmuş kənar məsələnin təxmini həllini tapmaq məqsədilə müvafiq xətti cəbri tənliklər sistemini həll etmək lazımdır. Fərq həllini tapmaq üçün xətti cəbrin ənənəvi birbaşa metodlarından istifadə olunur. Bu üsullar içərisində geniş yayılmış olanı, xüsusi lentvari

(zolaqlı) struktura malik matrislər üçün klassik Qauss üsulunun bir variantı olan proqon alqoritmidir (Thomas metodu) (Conte və de Boor, 1980).

Sərhəd şərtləri ilə birlikdə (12) tənliklər sistemi, üçdiaqonal matrisə malik xətti cəbri tənliklər sistemini təşkil edir və bu sistem aşağıdakı formadadır:

$$-\alpha_i y_{i-1} + \gamma_i y_i - \beta_i y_{i+1} = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (14)$$

Belə sistemlərin ədədi həlli üçün Proqon üsulu tətbiq olunur; bu üsul proqon əmsallarının hesablanması üçün rekurrent düsturları təqdim edir (düz proqon) (Morton və Mayers, 2005):

$$\xi_{i+1} = \frac{\beta_i}{\gamma_i - \alpha_i \xi_i}, \quad \vartheta_{i+1} = \frac{\varphi_i + \alpha_i \vartheta_i}{\gamma_i - \alpha_i \xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

Burada

$$\xi_1 = \kappa_1, \quad \vartheta_1 = \mu_1.$$

Həll üçün alırıq (əks proqon):

$$y_i = \xi_{i+1} y_{i+1} + \vartheta_{i+1}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0,$$

$$y_N = \frac{\kappa_2 \vartheta_N + \mu_2}{1 - \kappa_2 \xi_N}.$$

Proqon alqoritmını yalnız o halda tətbiq etmək olar ki, hesablama düsturlarında məxrəclər sıfıra bərabər olmasın (Burden və Faires, 2011, s. 515–575). Bundan əlavə, bu üsulun tətbiqinin mümkün olması üçün (13) sisteminin həllinin aşağıdakı şərtləri ödəməsi kifayətdir:

$$\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0, |c_i| \geq |\alpha_i| + |\beta_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$|\kappa_1| \leq 1, \quad |\kappa_2| \leq 1.$$

Tədqiqat

Sərhəd məsələsinin hesablanması üçün aparılan eksperimental tədqiqat nümunəsi: Aşağıdakı ikitərtibli xətti adi diferensial tənliyə baxaq (Finlayson, 1972, s. 200–260):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y - \exp(4x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

Sərhəd şərtləri:

$$\frac{dy(0)}{dx} - y(0) = 0.6, \quad \frac{dy(1)}{dx} + y(1) = 4 \exp(3) + \exp(4)$$

Bu sərhəd məsələsinin dəqiq (analitik) həlli aşağıdakı kimidir:

$$y_{\text{an}}(x) = \exp(-x) + \exp(3x) + 0.2 \exp(4x)$$

İndi isə bu aparılmış tədqiqatın həllinin nəticəsinə cədvəl şəklində baxaq:

x_i	$y_{an}(x_i)$	y_i (proqon üsulu)
0.00	2.20	2.61
0.05	2.36	2.77
0.10	2.55	2.97
0.15	2.79	3.22
0.20	3.09	3.53
0.25	3.44	3.90
0.30	3.86	4.35
0.35	4.37	4.90
0.40	4.98	5.54
0.45	5.70	6.32
0.50	6.57	7.24
0.55	7.59	8.33
0.60	8.80	9.63
0.65	10.24	11.17
0.70	11.95	13.00
0.75	13.98	15.16
0.80	16.38	17.72

Nəticə

Aparılan tədqiqat göstərir ki, adi diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin ədədi həllində sonlu fərqlər metodu həm universallığı, həm də praktik tətbiq imkanları baxımından səmərəli üsuldur. Diferensial operatorların uyğun fərq operatorları ilə əvəz edilməsi problemin diskret formada ifadə olunmasına və dəqiqliyin seçilmiş aproksimasiya sxemindən asılı olaraq artırılmasına şərait yaradır. Sərhəd məsələsinin bu üsulla aproksimasiyası nəticəsində alınan üçdiaqonal xətti tənliklər sistemi Qovma (Thomas) üsulu vasitəsilə hesablama baxımından effektiv və dayanıqlı şəkildə həll olunur. Müəyyən dayanıqlıq şərtlərinin ödənilməsi isə hesablamaların etibarlılığını təmin edir. Ümumilikdə, təqdim olunan yanaşma mühəndislik və fizika-mexanika sahələrində yaranan mürəkkəb sərhəd məsələlərinin yüksək dəqiqliklə modelləşdirilməsi və proqramlaşdırma mühitində praktik həlli üçün əlverişli riyazi-alqoritmik baza yaradır.

Ədəbiyyat

1. Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M., & Russell, R. D. (1995). *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*. SIAM.
2. Atkinson, K. E. (1989). *The numerical solution of ordinary differential equations*.
3. Bakhvalov, N. S. (1977). *Numerical methods*. Mir Publishers.
4. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9th ed.). Cengage Learning.
5. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2015). *Numerical methods for engineers* (7th ed.). McGraw-Hill.
6. Collatz, L. (1966). *The numerical treatment of differential equations*. Springer.
7. Conte, S. D., & de Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis: An algorithmic approach* (3rd ed.). McGraw-Hill.
8. Finlayson, B. A. (1972). *The method of weighted residuals and variational principles*. Academic Press.
9. Gautschi, W. (1997). *Numerical analysis: An introduction*. Birkhäuser.
10. Isaacson, E., & Keller, H. B. (1994). *Analysis of numerical methods*. Dover Publications.

11. Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.
12. Moin, P. (2010). *Fundamentals of engineering numerical analysis*. Cambridge University Press.
13. Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations: An introduction* (2nd ed.). Cambridge University Press.
14. Samarskii, A. A. (2001). *The theory of difference schemes*. Marcel Dekker.
15. Thomas, J. W. (1995). *Numerical partial differential equations: Finite difference methods*. Springer.

Daxil oldu: 21.08.2025

Qəbul edildi: 13.11.2025